УДК 004.94

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИЙ: МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ

Гольдштейн С.Л., Солонин Е.Б.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Представлен статистический подход к выбору степени аппроксимирующего полинома для медицинских показателей. Получены системы линейных дифференциальных уравнений, описывающие динамику совместного изменения двух или трёх таких показателей.
Ключевые слова: медицинские показатели, аппроксимирующий полином, дисперсия, система дифференциальных уравнений.

Dynamic models on the basis of approximations: a method of construction

Goldshtein S.L., Solonin E.B.

Ural Federal University, Ekaterinburg

The statistical approach to a choice of a degree of an approximating polynom for medical parameters is submitted. The systems of the linear differential equations describing dynamics of joint change of two or three such parameters are received.
Keywords: The medical parameters, approximating polynom, dispersion, system of the differential equations.

Информатизация медицины рассматривается в настоящее время как государственная задача [1]. Важное значение для информатизации имеет поддержка экспериментальной медицинской деятельности.

Использование экспериментально полученных медицинских показателей требует математического аппарата, способного адекватно моделировать динамику систем на их основе, а также изучать свойства этих систем. В частности, представляет интерес полиномиальная аппроксимация зависимостей с последующим построением модели в виде системы дифференциальных уравнений.

Пусть P(t) - некоторый измеряемый показатель (например, медицинский), представленный временным рядом $P(t_i)$ [2], t_i - моменты времени, в которые показатель фиксировался, $i = 0, 1, \dots, N$, $t_i \in [0, T]$, $t_0 = 0$, $t_N = T$. Интервалы времени между измерениями обычно одинаковы, т.е. $t_{i+1} - t_i = \text{const}$.

Предположим, что показатель P(t) измерялся многократно в течение нескольких периодов $[0, T]_k$ (например,

нескольких суток), где k - номер периода, причём моменты t_i для всех циклов измерений соответствуют одному и тому же времени суток, зависящего только от номера i. Сами периоды измерений могут и не быть смежными. Важно лишь, чтобы объект измерений был одним и тем же. Таким образом, будет получено несколько временных рядов $P^{(k)}(t_i)$, k = 1, … , L, где L - количество циклов измерений.

Временной ряд $P(t_i)$ можно аппроксимировать полиномами, например, ортогональными [3]. Степень аппроксимирующего полинома можно связать со статистическими характеристиками временного ряда. При этом сама аппроксимация не представляет каких-либо трудностей и реализована в ряде распространённых программ. Полученные аппроксимации могут быть затем использованы для построения математических моделей, описывающих совместное изменение параметров, что представляет существенный интерес.

В данной работе приведены методы построения моделей поведения в форме систем дифференциальных уравнений, полученных на основе аппроксимирующих полиномов.

Выбор степени аппроксимирующего полинома

Располагая несколькими временными рядами, можно установить их статистические характеристики, и в частности, степень разброса значений (дисперсию), измеренных в одни и те же моменты, но в разных циклах измерений. При этом дисперсия включает и погрешность измерений показателя.

Вычислим дисперсию [4] $D(P_i)$ в момент t_i:

$$D(P_i) = M(P_i^{(k)} - M(P_i^{(k)}))^2 .$$

где M(.) - математическое ожидание. При отсутствии априорных данных о вероятностях появления значений $P^{(k)}(t_i)$ можно принять

$$M(P_i^{(k)}) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} P_i^{(k)} .$$

Усреднённая дисперсия по всем точкам временного ряда характеризует искомую степень разброса значений:

$$\Delta P_{дисп} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} D(P_i) .$$

Если теперь построить полином, который бы аппроксимировал конкретный, однократно измеренный временной ряд для показателя P(t), то величина $\Delta P_{дисп}$ может быть использована для подбора степени m полинома.

Среднеквадратичное отклонение значений полинома P_i^{per} и измеренных значений показателя P_i характеризует качество аппроксимации:

$$\Delta P_{рег} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} (P_i - P_i^{рег})^2 .$$

В частности, при m = (N - 1) имеем $\Delta P_{рег} = 0$ (случай интерполяционного полинома). Однако в том случае, если аппроксимируемый ряд содержит существенные случайные отклонения (шумовую компоненту), высокая степень аппроксимирующего полинома отнюдь не означает и более высокую точность модели. Кроме того, высокая степень полиномов препятствует проведению аналитических исследований модели, а также она малопригодна для экстраполяции построенной зависимости за пределы интервала измерений.

Исходя из сказанного, следует произвести выбор степени полинома с учётом величины разброса экспериментальных значений. Например, можно воспользоваться приближённым равенством

$$\Delta P_{рег} \approx \Delta P_{дисп} .$$

Обозначим найденную таким образом степень полинома через N_d .

Помимо статистических характеристик, на выбор степени аппроксимирующего полинома могут влиять априорные знания о характере зависимости и, в частности, о предполагаемом количестве локальных экстремумов. Пусть предполагается наличие M таких экстремумов. Тогда требуемая степень N_e аппроксимирующего полинома должна быть не ниже M+1. Для медицинских показателей характерна суточная периодичность, поэтому в течение суток следует ожидать чётного числа экстремумов - поровну максимумов и минимумов.

В итоге степень N аппроксимирующего полинома необходимо выбрать из соотношений:

$$N = N_d , \qquad (1)$$

$$N = \max \{ N_d , N_e \} . \qquad (2)$$

Соотношение (1) используется в ситуации, когда для оценки степени привлекаются только статистические характеристики, соотношение (2) - данные о количестве экстремумов и статистические характеристики.

В том практически важном случае, когда два и более показателей рассматриваются в рамках одной модели, т.е. совместно, возможны две ситуации. В первой из них степень N одинаков для всех показателей, и данный случай сводится к случаю одного показателя. Вторая, существенно более сложная ситуация, возникает в случае, когда степени полиномов для одних показателей отличается от таковых для других показателей. Здесь возможны два подхода к выбору степени полинома: либо взять одну и ту же степень для всех показателей, либо разные степени для различных показателей. В первом случае представляется естественным взять наибольшую степень полинома.

Восстановление динамической системы по траектории

Пусть имеются m показателей, зависящих от времени, для которых построены аппроксимации одинаковой степени n:

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n ,$$
$$y(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_nt^n , \quad (3)$$
$$\ldots$$
$$w(t) = h_0 + h_1t + h_2t^2 + \ldots + h_nt^n .$$

Коэффициенты a_n , b_n , …, h_n при старших степенях t предполагаются не равными нулю.

В качестве динамической модели будем рассматривать систему из m линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{z} = Az + b(t), \quad (4)$$

где z = {x(t), y(t), …, w(t)} - вектор, состоящий из показателей, A = $\|a_{ik}\|$ - матрица коэффициентов размерности m × m, b(t) = {f(t), g(t), …, h(t)} - вектор свободных членов, представленных непрерывными функциями, зависящими только от времени.

Требуется найти такие коэффициенты и свободные члены системы (4), чтобы показатели (3) являлись её решением. В силу линейности как решений (3), так и самой системы, свободные члены f(t), g(t), …, h(t) также будут полиномами степени не выше n.

Построение функций - свободных членов - сводится к следующим действиям:

1) в правую часть системы (4) подставляем выражения (3), а в левой части вычисляем производные,
2) в правой части группируем коэффициенты, относящиеся к одинаковым степеням t^m; обозначим их $K_п^m$; аналогичные коэффициенты в левой части обозначим как $K_л^m$,
3) построим разности ($K_л^m$ - $K_п^m$), - они и будут коэффициентами при степенях t^m свободных членов.

Выбор коэффициентов и, соответственно, свободных членов системы (4) допускает значительную свободу. В частности, путём надлежащего подбора коэффициентов a_{ik} можно попытаться получить свободные члены минимально возможной степени.

Возьмём, для определённости, первое из уравнений системы (4):

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1m}w + f(t),$$

и соответствующее однородное уравнение:

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1m}w. \quad (5)$$

Производя дифференцирование в левой части первого из уравнений (3) и

подставляя в правую часть (5) вместо x, y, …, w их выражения (3), получим:

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1} = \\ & a_{11}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \\ & + a_{12}(b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n) + \ldots \\ & a_{1m}(h_0 + h_1 t + \ldots + h_n t^n) \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты $K_л^m$:

$$t^n : 0$$
$$t^{n-1} : n a_n$$
$$t^{n-2} : (n-1) a_{n-1}$$
$$\ldots$$
$$t^1 : 2a_2$$
$$t^0 : a_1$$

Коэффициенты $K_п^m$:

$$t^n : a_{11}a_n + a_{12}b_n + \ldots + a_{1m}h_n$$
$$t^{n-1} : a_{11}a_{n-1} + a_{12}b_{n-1} + \ldots + a_{1m}h_{n-1}$$
$$t^{n-2} : a_{11}a_{n-2} + a_{12}b_{n-2} + \ldots + a_{1m}h_{n-2}$$
$$\ldots$$
$$t^1 : a_{11}a_1 + a_{12}b_1 + \ldots + a_{1m}h_1$$
$$t^0 : a_{11}a_0 + a_{12}b_0 + \ldots + a_{1m}h_0$$

Коэффициенты при степенях f(t), равные ($K_л^m$ - $K_п^m$):

$$t^n : -(a_{11}a_n + a_{12}b_n + \ldots + a_{1m}h_n)$$
$$t^{n-1} : n a_n - (a_{11}a_{n-1} + a_{12}b_{n-1} + \ldots + a_{1m}h_{n-1})$$
$$\ldots$$
$$t^1 : 2a_2 - (a_{11}a_1 + a_{12}b_1 + \ldots + a_{1m}h_1)$$
$$t^0 : a_1 - (a_{11}a_0 + a_{12}b_0 + \ldots + a_{1m}h_0)$$

Зададимся целью максимально снизить степень полинома f(t). Для этого приравняем нулю первые m его коэффициентов. Считая элементы матрицы A: a_{11}, …, a_{1m} неизвестными величинами, получим неоднородную систему из m уравнений с m неизвестными:

$$\begin{aligned} & a_{11}a_n + a_{12}b_n + \ldots + a_{1m}h_n = 0 \\ & a_{11}a_{n-1} + a_{12}b_{n-1} + \ldots + a_{1m}h_{n-1} = n a_n \\ & \ldots \\ & a_{11}a_{n-m} + a_{12}b_{n-m} + \ldots + a_{1m}h_{n-m} = (n-m+1)a_{n-m+1} \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) является совместной и однозначно определяет набор элементов a_{11}, …, a_{1m} , если её определитель не равен нулю. Учитывая, что система (7) имеет самый общий вид, можно утверждать, что определитель может оказаться равным нулю лишь случайно, при маловероятном сочетании коэффициентов a_i, b_i, …, h_i . Таким образом, можно сформулировать утверждение:

Если определитель системы (7) не равен нулю, то минимально возможная степень полинома f(t) равна (n - m).

Аналогичные рассуждения можно провести для всех остальных уравнений системы (4).

Вместе с тем, получение коэффициентов полинома путём решения системы (7) сталкивается с трудностями уже при m > 3, т.к. полученные выражения являются весьма громоздкими и мало пригодны для дальнейшего

анализа. Поэтому имеет смысл рассмотрение и других форм свободных членов. Особенно важным в силу своей простоты является случай, когда его степень равна (n-1).

Модели для двух показателей

Пусть известны (например, экспериментально определены) временные ряды $\{x(t_i), y(t_i)\}$, где i = 0, 1, … , N, N - число точек, t_i – фиксированные моменты времени, $t_i \in [0, T]$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, x(t) и y(t) - некоторые показатели. Предположим, что путем статистического анализа установлен факт корреляции последовательностей $x(t_i)$, $y(t_i)$ между собой. Кроме того, построена непрерывная аппроксимация

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \,, \quad (8)$$
$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n \,,$$

где n - целое число, n < N. Константы a_0 и b_0 имеют смысл начальных значений x(0), y(0) соответственно. Коэффициенты a_n , b_n при старших степенях t предполагаются не равными нулю.

Задача заключается в том, чтобы найти коэффициенты и свободные члены для системы двух линейных неоднородных ДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + f(t), \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + g(t), \end{aligned} \quad (9)$$

решением которой является аппроксимация (8).

Произведём действия 1 - 3, описанные в предыдущем разделе. Продифференцировав соотношения (8) по t, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 + a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1} \\ \dot{y} &= b_1 + b_2 t + \ldots + n b_n t^{n-1} \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь необходимо представить систему (3) в форме (2). Поскольку правая часть системы (3) имеет степень (n-1), а исходная аппроксимация (1) - степень n, то для того, чтобы ввести в (3) координаты x и y, надо составить такую их линейную комбинацию, которая бы не содержала n-ю степень. Для этого необходимо, чтобы

$$(a_{11}a_n + a_{12}b_n)t^n = 0\,,$$
$$(a_{21}a_n + a_{22}b_n)t^n = 0\,.$$

Данные равенства справедливы, если

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{b_n}{a_n}, \quad \frac{a_{22}}{a_{21}} = -\frac{a_n}{b_n}. \quad (11)$$

Поскольку, по условию, a_n и b_n не равны нулю, то для выполнения равенств (11) также требуется, чтобы $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$.

Представим (9), например, в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{b_n}y + f(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{a_n}x + y + g(t). \end{aligned} \quad (12)$$

На основе соотношений (11) возможны и другие варианты построения системы (9). Например, можно придать одному из элементов пары (a_{11}, a_{12}) значения +1 или -1, что даёт четыре комбинации. Второй элемент при этом вычисляется по

соотношению (11). То же самое можно независимо проделать с парой (a_{21}, a_{22}). Всего получается, таким образом, 16 комбинаций. Ниже дано четыре их примера:

$$\dot{x} = -x + \frac{a_n}{b_n} y + f(t),$$
$$\dot{y} = \frac{b_n}{a_n} x - y + g(t), \qquad (13)$$

$$\dot{x} = -\frac{b_n}{a_n} x + y + f(t),$$
$$\dot{y} = x - \frac{a_n}{b_n} y + g(t), \qquad (14)$$

$$\dot{x} = b_n x - a_n y + f(t), \qquad (15)$$
$$\dot{y} = -b_n x + a_n y + g(t),$$

$$\dot{x} = -b_n x + a_n y + f(t), \qquad (16)$$
$$\dot{y} = b_n x - a_n y + g(t).$$

Определим f(t) и g(t) для системы (12) для случая, когда их порядок равен (n - 1). Для систем (13), (14), (15) способ определения совпадает с нижеследующим.

Подставим в (12) вместо x и y их аппроксимации (8):

$$\dot{x} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n -$$
$$- \frac{a_n}{b_n}(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n) + f(t),$$

$$\dot{y} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n -$$
$$- \frac{b_n}{a_n}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n) + g(t),$$

или, после сокращения старших членов,

$$\dot{x} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} -$$
$$- \frac{a_n}{b_n}(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{n-1} t^{n-1}) + f(t),$$
$$\dot{y} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{n-1} t^{n-1} - \qquad (17)$$
$$- \frac{b_n}{a_n}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}) + g(t).$$

Продифференцировав соотношения (8) по t, получим:

$$\dot{x} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1},$$
$$\dot{y} = b_1 + 2b_2 t + \ldots + n b_n t^{n-1}. \qquad (18)$$

Сравнивая (17) и (18) и проведя группировку по степеням t^m, получим коэффициенты для f(t):

при t^0: $a_1 - (a_0 - \frac{a_n}{b_n} b_0)$

при t^1: $2a_2 t - t(a_1 - \frac{a_n}{b_n} b_1)$

при t^2: $3a_3 t^2 - t^2(a_2 - \frac{a_n}{b_n} b_2)$

…

при t^{n-1}: $n a_n t^{n-1} - t^{n-1}(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_n} b_{n-1})$

Аналогично для g(t):

при t^0: $b_1 - (b_0 - \frac{b_n}{a_n} a_0)$

при t^1: $2b_2 t - t(b_1 - \frac{b_n}{a_n} a_1)$

при t^2: $3b_3 t^2 - t^2(b_2 - \frac{b_n}{a_n} a_2)$

…

при t^{n-1}: $n b_n t^{n-1} - t^{n-1}(b_{n-1} - \frac{b_n}{a_n} a_{n-1})$

Для системы (12) и произвольной степени n аппроксимирующего полинома, n = 1, 2, …, (N - 1) получим:

$$f(t) = a_1 - a_0 + \frac{a_n}{b_n} b_0 + t(2a_2 - a_1 + \frac{a_n}{b_n} b_1) +$$

$$+ \ldots + t^p((p+1)a_{p+1} - a_p + \frac{a_n}{b_n} b_p) + \ldots +$$

$$+ t^{n-1}(na_n - a_{n-1} + \frac{a_n}{b_n} b_{n-1}), \qquad (19)$$

$$g(t) = b_1 - b_0 + \frac{b_n}{a_n} a_0 + t(2b_2 - b_1 + \frac{b_n}{a_n} a_1) +$$

$$+ \ldots + t^p((p+1)b_{p+1} - b_p + \frac{b_n}{a_n} a_p) + \ldots +$$

$$+ t^{n-1}(nb_n - b_{n-1} + \frac{b_n}{a_n} a_{n-1}),$$

где p - целое число, 1 < p < (n - 1).

Для системы (13) и произвольной степени n аппроксимирующего полинома, n = 1, 2, …, (N - 1) получим выражения, отличающиеся от (18) только знаками:

$$f(t) = a_1 + a_0 - \frac{a_n}{b_n} b_0 + t(2a_2 + a_1 - \frac{a_n}{b_n} b_1) + \ldots +$$

$$+ t^p((p+1)a_{p+1} + a_p - \frac{a_n}{b_n} b_p) + \ldots +$$

$$+ t^{n-1}(na_n + a_{n-1} - \frac{a_n}{b_n} b_{n-1}), \qquad (20)$$

$$g(t) = b_1 + b_0 - \frac{b_n}{a_n} a_0 + t(2b_2 + b_1 - \frac{b_n}{a_n} a_1) + \ldots +$$

$$+ t^p((p+1)b_{p+1} + b_p - \frac{b_n}{a_n} a_p) + \ldots +$$

$$+ t^{n-1}(nb_n + b_{n-1} - \frac{b_n}{a_n} a_{n-1}).$$

Итак, в данном случае функции f(t), g(t) являются полиномами порядка (n-1), т.е. непрерывно-дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим несколько случаев, конкретизирующих решение (12), (19).

Аппроксимация 1-й степени (линейная)

$$x = a_0 + a_1 t \ ,$$

$$y = b_0 + b_1 t \ .$$

Система ДУ:

$$\dot{x} = x - \frac{a_1}{b_1} y + f(t),$$
$$\dot{y} = -\frac{b_1}{a_1} x + y + g(t), \qquad (21)$$

где

$$f(t) = a_1 - a_0 + \frac{a_1}{b_1} b_0 \ , \qquad (22)$$

$$g(t) = b_1 - b_0 + \frac{b_1}{a_1} a_0 \ ,$$

т.е. f(t) и g(t) здесь постоянны.

Аппроксимация 2-й степени (квадратичная)

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

Система ДУ:

$$\dot{x} = x - \frac{a_2}{b_2} y + f(t),$$
$$\dot{y} = -\frac{b_2}{a_2} x + y + g(t), \qquad (23)$$

где

$$f(t) = a_1 - a_0 + \frac{a_2}{b_2} b_0 + t(2a_2 - a_1 + \frac{a_2}{b_2} b_1), \qquad (24)$$

$$g(t) = b_1 - b_0 + \frac{b_2}{a_2} a_0 + t(2b_2 - b_1 + \frac{b_2}{a_2} a_1).$$

Аппроксимация 3-й степени

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

Система ДУ:

$$\dot{x} = x - \frac{a_3}{b_3} y + f(t),$$
$$\dot{y} = -\frac{b_3}{a_3} x + y + g(t),$$

где

$$f(t) = a_1 - a_0 + \frac{a_3}{b_3} b_0 +$$

$$+ t(2a_2 - a_1 + \frac{a_3}{b_3} b_1) + t^2(3a_3 - a_2 + \frac{a_3}{b_3} b_2),$$

$$g(t) = b_1 - b_0 + \frac{b_3}{a_3} a_0 +$$

$$+ t(2b_2 - b_1 + \frac{b_3}{a_3} a_1) + t^2(3b_3 - b_2 + \frac{b_3}{a_3} a_2).$$

Аппроксимация 4-й степени

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$$

Система ДУ:

$$\dot{x} = x - \frac{a_4}{b_4} y + f(t),$$

$$\dot{y} = -\frac{b_4}{a_4} x + y + g(t),$$

где

$$f(t) = a_1 - a_0 + \frac{a_4}{b_4} b_0 + t(2a_2 - a_1 + \frac{a_4}{b_4} b_1)$$

$$+ t^2(3a_3 - a_2 + \frac{a_4}{b_4} b_2) + t^3(4a_4 - a_3 + \frac{a_4}{b_4} b_3)$$

$$g(t) = b_1 - b_0 + \frac{b_4}{a_4} a_0 + t(2b_2 - b_1 + \frac{b_4}{a_4} a_1)$$

$$+ t^2(3b_3 - b_2 + \frac{b_4}{a_4} a_2) + t^3(4b_4 - b_3 + \frac{b_4}{a_4} a_3)$$

Воспользуемся теперь системой уравнений (7) для того чтобы получить свободные члены минимально возможной степени.

Аппроксимация 1-й степени (линейная)

$$x = a_0 + a_1 t \ ,$$
$$y = b_0 + b_1 t \ .$$

Система ДУ:

$$\dot{x} = a_{11} x + a_{12} y + f(t),$$
$$\dot{y} = a_{21} x + a_{22} y + g(t). \qquad (25)$$

Система линейных уравнений (7) для первого из уравнений (25) здесь имеет вид:

$$a_{11} a_1 + a_{12} b_1 = 0,$$
$$a_{11} a_0 + a_{12} b_0 = a_1 .$$

а для второго -

$$a_{21} a_1 + a_{22} b_1 = 0,$$
$$a_{21} a_0 + a_{22} b_0 = b_1 .$$

Эти системы имеют единственное решение при условии

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_0}{b_0}, \ b_0 \neq 0 .$$

Решив их, получим искомые коэффициенты:

$$a_{11} = -\frac{a_1 b_1}{a_1 b_0 - a_0 b_1} \ , \quad a_{12} = \frac{a_1^2}{a_1 b_0 - a_0 b_1} \ ,$$

$$a_{21} = -\frac{b_1^2}{a_1 b_0 - a_0 b_1} \ , \quad a_{22} = \frac{a_1 b_1}{a_1 b_0 - a_0 b_1} \ .$$

Для линейной аппроксимации здесь получим (сравнить с (22)):

$$f(t) = 0,$$
$$g(t) = 0 \ ,$$

т.е. система (25) на самом деле получается однородной.

Аппроксимация 2-й степени (квадратичная)

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2.$$

Система ДУ:

$$\dot{x} = x - \frac{a_2}{b_2} y + f(t),$$
$$\dot{y} = -\frac{b_2}{a_2} x + y + g(t). \quad (26)$$

Система линейных уравнений (7) для первого из уравнений (26) здесь имеет вид:

$$a_{11}a_2 + a_{12}b_2 = 0,$$
$$a_{11}a_1 + a_{12}b_1 = 2a_2.,$$

а для второго -

$$a_{21}a_2 + a_{22}b_2 = 0,$$
$$a_{21}a_1 + a_{22}b_1 = 2b_2.$$

Эти системы имеют единственное решение при условии

$$\frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_1}{b_1}, b_1 \neq 0.$$

Решив их, получим искомые коэффициенты:

$$a_{11} = -\frac{2a_2b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}, \qquad a_{12} = \frac{2a_2^2}{a_2b_1 - a_1b_2},$$
$$a_{21} = -\frac{2b_2^2}{a_2b_1 - a_1b_2}, \qquad a_{22} = \frac{2a_2b_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Для квадратичной аппроксимации здесь получим (сравнить с (24)):

$$f(t) = a_1 - (a_{11}a_0 + a_{12}b_0),$$
$$g(t) = b_1 - (a_{21}a_0 + a_{22}b_0),.$$

т.е. эти функции здесь не зависят от t.

Обобщение на случай более высокой размерности

Пусть имеется три показателя (более высокие размерности исчерпываются аналогично), каждый из которых аппроксимирован полиномом:

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n,$$
$$y(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_nt^n, \quad (27)$$
$$z(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \ldots + c_nt^n.$$

Здесь n - целое число, n < N. Константы a_0, b_0, c_0 имеют смысл начальных значений x(0), y(0), z(0) соответственно. Коэффициенты a_n, b_n, c_n при старших степенях t предполагаются не равными нулю. Предполагается также, что x(t), y(t), z(t) попарно коррелируют между собой.

Система дифференциальных уравнений, аналогичная системе (4) для двумерного случая, может иметь вид:

$$\dot{x} = x - \frac{a_n}{2b_n} y - \frac{a_n}{2c_n} z + f(t),$$
$$\dot{y} = -\frac{b_n}{2a_n} x + y - \frac{b_n}{2c_n} z + g(t), \quad (28)$$
$$\dot{z} = -\frac{c_n}{2a_n} x - \frac{c_n}{2b_n} y + z + h(t).$$

Здесь имеется большое число вариантов построении моделей. Так, первое из уравнений (9) может иметь следующие шесть наборов коэффициентов при переменных x, y, z (индексы n для простоты опущены):

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{2b} & -\frac{a}{2c} \\ -1 & \frac{a}{2b} & \frac{a}{2c} \\ 1 & -\frac{a}{b} & 0 \\ -1 & \frac{a}{b} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ -1 & 0 & \frac{a}{c} \end{pmatrix}$$

Аналогичные наборы могут быть независимо построены и для двух других переменных, что даёт $6^3 = 216$ вариантов построения системы.

Вид функций f(t), g(t), h(t) может быть получен аналогично тому, как это было сделано для случая двух уравнений. Например, для линейного случая имеем:

$$f(t) = a_1 - a_0 + \frac{a_1}{2b_1} b_0 + \frac{a_1}{2c_1} c_0 \ ,$$

$$g(t) = b_1 - b_0 + \frac{b_1}{2a_1} a_0 + \frac{b_1}{2c_1} c_0 \ ,$$

$$h(t) = c_1 - c_0 + \frac{c_1}{2a_1} a_0 + \frac{c_1}{2b_1} b_0 \ .$$

Применение и свойства моделей

Использование моделей вида (4) для исследования динамики медицинских показателей возможно только в узких диапазонах начальных условий, т.к. нет никаких оснований ожидать, что сам вид модели не изменится при существенном отклонении начальных значений показателей от нормы. Кроме того, движение может протекать в ограниченных областях фазового пространства, т.к. объектом моделирования является живой человек, обладающий гомеостазом. Таким образом, модель можно использовать для изучения влияния фазовых ограничений.

Решения, близкие к периодическим, можно получить, если потребовать выполнения равенства:

$$P^{(k)}(0) = P^{(k-1)}(T),$$

которое означает сшивку начального значения для k-го цикла с конечным значением (k-1)-го цикла.

Результаты и выводы

Для временных рядов, представляющих систему медицинских показателей, предложен критерий выбора степени аппроксимирующего полинома. Дан метод построения динамических моделей в форме системы дифференциальных уравнений для случаев двух и трёх показателей.

Полученный аппарат может быть использован при изучении качественных свойств моделей поведения медицинских объектов, а также для построения и исследования управляемых систем.

Список литературы

1. Лищук В.А. Стратегия информатизации медицины - основные положения, принципы и предложения / В.А. Лищук, С.В. Калин, Г.В. Шевченко, Д.Ш. Газизова, Д.А. Андриков, Л.В. Сазыкина, А.И. Данилевич. - Ейск.: ЮгПолиграф, 2011.- 237 с.

2. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д. Бриллинджер. - М.: Мир, 1980. - 536 с.

3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. - М.: Наука, 1979.-416 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. - М.: Высшая школа, 2002. 479 с.

Солонин Евгений Борисович – к.т.н., доцент кафедры вычислительной техники УрФУ, 620002, г.Екатеринбург, ул.Мира, 19; e-mail: esolonin@rambler.ru