УДК 004.94

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИЙ: ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ

Гольдштейн С.Л., Солонин Е.Б.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Данная статья является логическим продолжением методов построения динамических моделей на основе аппроксимации. Используя модели поведения динамических систем, построены модели управляемых систем. Исследованы свойства устойчивости и управляемости построенных моделей.
Ключевые слова: модели поведения, модели управляемых систем, устойчивость, управляемость.

Dynamic models on the basis of approximations: research of properties

Goldshtein S.L., Solonin E.B.

Ural Federal University, Ekaterinburg
On the basis of models of behaviour of dynamic systems models of controlled systems are constructed. Properties of stability and controllability of the constructed models are investigated.

Keywords: Models of behaviour, model of controlled systems, stability, controllability.

Актуальность и постановка задачи

В предыдущей статье [1] речь шла о методах построения динамических моделей поведения на основе полиномиальных зависимостей, аппроксимирующих экспериментально полученные медицинские показатели.

Приведём общий вид рассмотренной в [1] динамической модели на основе системы из m линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{z} = Az + b(t), \qquad (1)$$

где z = {x(t), y(t), …, w(t)} - вектор, состоящий из показателей,

$A = \|a_{ik}\|$ - матрица коэффициентов размерности $m \times m$,

b(t) = {f(t), g(t), …, h(t)} - вектор свободных членов, представленных непрерывными функциями, зависящими только от времени.

Были рассмотрены частные виды модели (1) для двух показателей:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{b_n} y + f(t) \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{a_n} x + y + g(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -x + \frac{a_n}{b_n} y + f(t), \qquad (3)$$
$$\dot{y} = \frac{b_n}{a_n} x - y + g(t),$$

$$\dot{x} = b_n x - a_n y + f(t), \qquad (4)$$
$$\dot{y} = -b_n x + a_n y + g(t),$$

и трёх показателей:

$$\dot{x} = x - \frac{a_n}{2b_n} y - \frac{a_n}{2c_n} z + f(t),$$
$$\dot{y} = -\frac{b_n}{2a_n} x + y - \frac{b_n}{2c_n} z + g(t), \qquad (5)$$
$$\dot{z} = -\frac{c_n}{2a_n} x - \frac{c_n}{2b_n} y + z + h(t).$$

Полученные модели могут быть преобразованы в модели управляемых систем, свойства которых представляют существенный теоретический и практический интерес.

В данной работе поставлена и решена задача исследования свойств устойчивости и управляемости динамических систем, описывающих совместное изменение медицинских показателей.

Устойчивость моделей

Устойчивость системы (1) по Ляпунову [2] в окрестности точки t = 0 определим из характеристического уравнения. Так, для системы (2) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{a_n}{b_n} \\ -\frac{b_n}{a_n} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, т.е. система не устойчива. Это свойство следует учесть при численном решении системы.

Аналогично для системы (3):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \frac{a_n}{b_n} \\ \frac{b_n}{a_n} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 - 1 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, т.е. система уже устойчива.

Исследуем ещё на устойчивость систему (4):

$$\begin{vmatrix} b_n-\lambda & -a_n \\ -b_n & a_n-\lambda \end{vmatrix} = (b_n-\lambda)(a_n-\lambda) - a_n b_n = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a_n + b_n$, и устойчивость системы определяется условием:

$$a_n + b_n \le 0.$$

Модели с управлением

Модель (1) может быть преобразована в модель управляемого объекта путём добавления в правую часть управлений:

$$u(t) = \{ u_1(t), \ldots, u_k(t) \}.$$

Поскольку речь идёт о медицинских показателях, следует предположить ограниченность управлений как по амплитуде, так и в смысле евклидовой нормы:

$$|u_i(t)| \le \lambda_i \quad , \quad \int_0^T u_i^2(\tau) d\tau \le \alpha_i \; .$$

Рассмотрим примеры управляемых систем, построенных на базе ранее описанных динамических моделей. Так, система (2) может принять форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{b_n}y + f(t) + u_1(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{a_n}x + y + g(t) + u_2(t). \end{aligned} \qquad (6)$$

Можно также рассмотреть модель с одним управлением (один фактор влияет одновременно на оба показателя):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{b_n}y + f(t) + e_1u(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{a_n}x + y + g(t) + e_2u(t), \end{aligned} \qquad (7)$$

а также модели с одним управлением, воздействующим только на один показатель:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{b_n}y + f(t) + u(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{a_n}x + y + g(t), \end{aligned} \qquad (8)$$

либо

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{b_n}y + f(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{a_n}x + y + g(t) + u(t). \end{aligned} \qquad (9)$$

Для системы (5) с тремя показателями можно, например, рассмотреть следующие варианты:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{2b_n}y - \frac{a_n}{2c_n}z + f(t) + u_1(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{2a_n}x + y - \frac{b_n}{2c_n}z + g(t) + u_2(t), \\ \dot{z} &= -\frac{c_n}{2a_n}x - \frac{c_n}{2b_n}y + z + h(t) + u_3(t). \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{2b_n}y - \frac{a_n}{2c_n}z + f(t) + u_1(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{2a_n}x + y - \frac{b_n}{2c_n}z + g(t) + u_2(t), \\ \dot{z} &= -\frac{c_n}{2a_n}x - \frac{c_n}{2b_n}y + z + h(t). \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{a_n}{2b_n}y - \frac{a_n}{2c_n}z + f(t) + u(t), \\ \dot{y} &= -\frac{b_n}{2a_n}x + y - \frac{b_n}{2c_n}z + g(t), \\ \dot{z} &= -\frac{c_n}{2a_n}x - \frac{c_n}{2b_n}y + z + h(t). \end{aligned} \qquad (12)$$

Управляемость систем

Управляемость систем с управлением определим по критерию Калмана [3]. Согласно этому критерию, система является вполне управляемой, если среди векторов

$$B,\ AB,\ A^2B,\ \dots,\ A^{m-1}B \qquad (13)$$

найдётся m линейно-независимых векторов (m - размерность системы). В случае системы (6)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{a_n}{b_n} \\ -\dfrac{b_n}{a_n} & 1 \end{vmatrix},$$

поэтому уже первый член последовательности (13) даёт два линейно-независимых вектора, т.е. система (6) вполне управляема.

Для системы (7) имеем:

$$B = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{a_n}{b_n} \\ -\dfrac{b_n}{a_n} & 1 \end{vmatrix}.$$

Первые два члена последовательности (13) дают матрицу:

$$M = \begin{vmatrix} e_1 & e_1 - \frac{a_n}{b_n} e_2 \\ e_2 & -\frac{b_n}{a_n} e_1 + e_2 \end{vmatrix},$$

определитель которой должен быть не равен нулю. После преобразований получаем условие управляемости системы (7):

$$\frac{a_n}{b_n} \neq \pm \frac{e_1}{e_2} .$$

Предполагается, что числа a_n, b_n, e_1, e_2 не равны нулю.

Для системы (8) имеем:

$$B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{a_n}{b_n} \\ -\frac{b_n}{a_n} & 1 \end{vmatrix} .$$

Первые два члена последовательности (13) дают матрицу:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{b_n}{a_n} \end{vmatrix},$$

определитель которой должен быть не равен нулю. Раскрывая определитель, получаем условие управляемости:

$$\frac{b_n}{a_n} \neq 0 ,$$

которое выполняется, т.к. коэффициент b_n предполагается не равным нулю. Аналогично, для системы (9) условием управляемости будет:

$$\frac{a_n}{b_n} \neq 0 .$$

Переходя к трёхмерным системам видим, что система (10) вполне управляема, т.к. для неё

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{a_n}{2b_n} & -\frac{a_n}{2c_n} \\ -\frac{b_n}{2a_n} & 1 & -\frac{b_n}{2c_n} \\ -\frac{c_n}{2a_n} & -\frac{c_n}{2b_n} & 1 \end{vmatrix},$$

и уже первый член последовательности (13) даёт три линейно-независимых вектора.

Для системы (11) матрица B примет вид

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а первые два члена последовательности (13) дают следующую матрицу:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{a_n}{2b_n} \\ 0 & 1 & -\frac{b_n}{2a_n} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{c_n}{2a_n} & -\frac{c_n}{2b_n} \end{vmatrix} .$$

Взяв первые три столбца и вычислив получившийся определитель, получим следующее условие управляемости:

$$\frac{c_n}{2a_n} \neq 0 .$$

Так как коэффициенты a_n и c_n не равны нулю по условию задачи, то система (11) также является вполне управляемой.

Для системы (12) матрица B примет вид

$$B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

а первые три члена последовательности (13) дают следующую матрицу:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{b_n}{2a_n} & -\frac{3b_n}{4a_n} \\ 0 & -\frac{c_n}{2a_n} & -\frac{3c_n}{4a_n} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы M равен нулю, и система (12) оказывается не управляемой.

Результаты и выводы

Для динамических систем на базе линейных дифференциальных уравнений изучены свойства устойчивости и управляемости. Установлено, что при соблюдении некоторых ограничений, налагаемых на коэффициенты систем, эти системы могут быть вполне управляемыми при числе управлений, меньшем количества показателей. Иными словами, два и более медицинских показателя могут управляться одним управлением. Возможная природа таких управлений представляет особый интерес и может быть установлена впоследствии.

Список литературы

1. Гольдштейн С.Л. Динамические модели на основе аппроксимаций: метод построения / С.Л. Гольдштейн, Е.Б.Солонин // Системная интеграция в здравоохранении, № 1, 2012, С. 3-14.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: Наука, 1974. - 331 с.

3. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. М.: Наука, 1968.- 476 с.

Солонин Евгений Борисович – к.т.н., доцент кафедры вычислительной техники УрФУ, 620002, г.Екатеринбург, ул.Мира, 19; e-mail: esolonin@rambler.ru.